Huiswerkopdracht Complexiteit 2

Inleveren 13 april 2020
Inleveren: `vinkhuijzenlt@liacs.leidenuniv.nl`
Geef toelichting bij al je antwoorden.

In deze opgave bekijken we een aantal problemen, en schrijven ze om naar het Boolean Satisfiability probleem.

Opgave 1: Tellen met Boolse formules

We maken een Boolse formule ϕ, op n Boolse variabelen $x_1, \ldots, x_n$, die naar True evalueert dan en slechts dan als precies 2 van de variabelen de waarde True hebben. Met andere woorden, we ontwerpen een Boolse formule die aan de volgende eis voldoet:

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \iff (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2) \tag{1}$$

We geven een formule die uit twee onderdelen bestaat. Het eerste onderdeel gaat afdwingen dat *ten minste* 2 variabelen de waarde True hebben, en het tweede onderdeel dwingt af dat *ten hoogste* 2 variarbelen de waarde True hebben.

Het eerste onderdeel is de volgende Boolse formule, die we $\phi_{\geq 2}$ noemen:

$$\begin{aligned}
\phi_{\geq 2}(x_1, \ldots, x_n) = &(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee \cdots \vee (x_1 \wedge x_n) && (2)\\
&\vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_4) \vee \cdots \vee (x_2 \wedge x_n) && (3)\\
&\vdots && (4)\\
&\vee (x_{n-1} \wedge x_n) && (5)
\end{aligned}$$

Met andere woorden, $\phi_{\geq 2}$ is de volgende formule:

$$\phi_{\geq 2}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i \wedge x_j \tag{6}$$

De formule $\phi_{\geq 2}$ staat in zogehete Disjunctive Normal Form. De deelformules van de vorm $(x_i \wedge x_j)$ heten *clausules*.

Opgave 1.a Hoeveel clausules heeft $\phi_{\geq 2}$, als $n \geq 3$?

Opgave 1.b Toon aan dat $\phi_{\geq 2}$ inderdaad doet wat we verwachten. Dat wil zeggen, toon aan dat de vervullende toekenningen aan $\phi_{\geq 2}(x_1, \ldots, x_n)$ precies díe toekenningen $\vec{x} = x_1 \cdots x_n$ zijn met minstens twee variabelen die de de waarde True hebben.

Het tweede onderdeel van de formule ϕ is de Boolse formule $\phi_{\leq 2}(x_1, \ldots, x_n)$, wiens vervullende toekenningen precies die toekenningen zijn met hooguit twee variabelen met de waarde True:

$$\phi_{\leq 2}(x_1, \ldots, x_n) = (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge \cdots \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_n) \tag{7}$$

$$\vdots \tag{8}$$

$$\wedge (\neg x_{n-2} \vee \neg x_{n-1} \vee \neg x_n) \tag{9}$$

Met andere woorden, $\phi_{\leq 2}$ is de volgende formule:

$$\phi_{\leq 2} = \bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq n} (\neg x_i \vee \neg x_j \vee \neg x_k) \tag{10}$$

De formule $\phi_{\leq 2}$ staat in Conjunctive Normal Form. Wederom heten de deelformules van de vorm $(\neg x_i \vee \neg x_j \vee \neg x_k)$ *clausules.*

Opgave 1.c Hoeveel clausules heeft $\phi_{\leq 2}$, als $n \geq 3$?

Opgave 1.d Toon aan dat $\phi_{\leq 2}$ inderdaad doet wat we verwachten. Met andere woorden, toon aan dat de vervullende toekenningen aan $\phi_{\leq 2}(x_1, \ldots, x_n)$ precies dié toekenningen $\vec{x} = x_1 \cdots x_n$ zijn met hooguit twee variabelen die de waarde True hebben.

Opgave 1.e Toon aan dat de formule $\phi = (\phi_{\geq 2}) \wedge (\phi_{\leq 2})$ ook doet wat we verwachten. Met andere woorden, toon aan dat de vervullende toekenningen aan $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ precies die toekenningen $\vec{x} = x_1 \cdots x_n$ zijn met precies twee variabelen die de waarde True hebben.

Opgave 2: Cycle covers

Deze opgave gaat over *cycle covers.*

Definition 1 (Cycle cover)**.** Een *cycle cover* van een graaf $G = (V, E)$ is een verzameling van takken $C \subseteq E$ zodanig dat de graaf $H = (V, C)$ een verzameling van vertex-disjuncte cykels[1] is. Een cykel is een graaf waarin alle knopen graad 2 hebben.

Opgave 2.a Geef een algoritme in pseudocode met onderstaande input-output specificatie. Hoe lang is de formule die je produceert? Geef een bovengrens in

[1] Twee cykels zijn vertex-disjunct (van elkaar) als ze geen vertices gemeenschappelijk hebben

termen van het aantal knopen in de graaf. Je mag hierbij gebruiken dat $|E| \leq \frac{1}{2}|V|(|V|-1)$.

Input: Een ongerichte graaf $G = (V, E)$ met $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ en $E = \{e_0, \ldots, x_{m-1}\}$.
Output: Een Boolse formule ψ die vervulbaar is dan en slechts dan als G een *cycle cover* heeft.

Hint: Maak een formule $\psi(x_0, \ldots, x_{m-1})$ wiens vervullende toekenningen precies de cykel covers van G zijn. Maak gebruik van Opgave 1.

Opgave 3: Bereikbaarheid

We bekijken het probleem van bereikbaarheid in een ongerichte graaf.

Input: Een ongerichte graaf $G = (V, E)$ met $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ en $E = \{e_0, \ldots, e_{m-1}\}$.
Output: ***Ja*** als v_1 te bereiken is vanuit v_0, anders ***Nee***.

We maken wederom een formule α die vervulbaar is dan en slechts dan als v_1 te bereiken is vanuit v_0. De formule heeft $m(n-1)$ variabelen, $x_0, \ldots, x_{m(n-1)-1}$.

Het idee is om te zorgen dat alle vervullende toekenningen aan α een pad van v_0 naar v_1 encoderen.

Het idee is om alle paden van v_0 naar v_1 te encoderen als vervullende toekenningen aan de formule α. We doen dit door een formule op $m(n-1)$ variabelen te maken, $x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_{2m-1}, \ldots, x_{m(n-1)-1}$. We zorgen ervoor dat er, voor elke $0 \leq k \leq n-1$, hooguit één van de variabelen $x_{km}, \ldots, x_{(k+1)m-1}$ de waarde True heeft. Een vervullende toekenning interpreteren we als volgt als een pad. Zeg dat, uit de variabelen $x_{km}, \ldots, x_{(k+1)m-1}$, de variabele x_{km+i} de enige is met de waarde True. Dan is e_i de k-de tak op het pad. In een ongewogen graaf is de lengte van een pad van v_0 naar v_1, als er een bestaat, hooguit $n-1$.

Zij $N(v) = \{(u,v) | (u,v) \in E\}$ de verzameling takken die aan vertex v grenzen.

De formule β is de volgende formule:

$$\beta = \bigwedge_{0 \leq d \leq n-2} \left(\bigvee_{v \in V} \bigvee_{f \in N(v)} \bigvee_{g \in N(v)} x_{dm+u} \wedge x_{(d+1)m+w} \right) \tag{11}$$

Voor een getal $0 \leq k \leq n-1$ is γ_k de volgende formule:

$$\gamma_k = \bigwedge_{0 \leq i < j \leq m-1} (\neg x_{km+i} \vee \neg x_{km+j}) \tag{12}$$

We maken de volgende formule, δ:

$$\delta = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \gamma_{n-1} \tag{13}$$

Als laatste geven we formules ε_1 en ε_2:

$$\varepsilon_1 = \bigvee_{e_i \in N(v_1)} x_i \qquad\qquad \varepsilon_2 = \bigvee_{e_i \in N(v_2)} x_{(n-2)m+i} \tag{14}$$

Opgave 3.a Wat zijn de vervullende toekenningen aan δ? Geef een beschrijving.

Opgave 3.b Zij $\alpha = (\beta) \wedge (\delta) \wedge (\varepsilon_1) \wedge (\varepsilon_2)$. Toon aan dat α vervulbaar is dan en slechts dan als, in G, er een pad is vanaf v_1 naar v_2.

Opgave 3.c Hoeveel vervullende toekenningen heeft $\alpha(x_1, \ldots, x_{(n-1)m-1})$? Je mag je antwoord uitdrukken in het aantal paden, $|Pad(s, t, \ell)|$ van $s \in V$ naar t van lengte ℓ.

Opgave 3.d Is de formule δ werkelijk nodig? Met ander woorden, geldt dat $(\beta) \wedge (\varepsilon_1) \wedge (\varepsilon_2)$ vervulbaar is dan en slechts dan als er een pad van v_0 naar v_1 is?